

# Module 8 - Estimation par intervalles de confiance

STT-1000 Probabilités et statistique

---

Département de mathématiques et de statistique



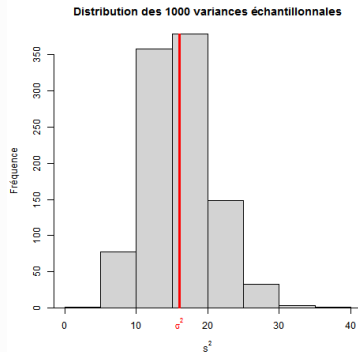
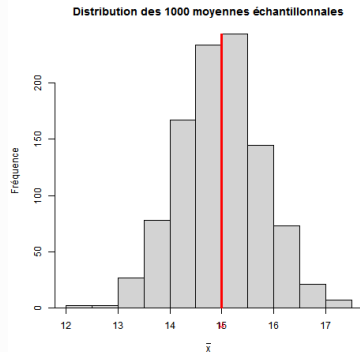
UNIVERSITÉ  
**LAVAL**

# Introduction

# Introduction : estimation ponctuelle imparfaite

Un échantillon donne lieu à UNE estimation du paramètre. Quelle confiance peut-on avoir en cette estimation ?

*Ci-dessous, chaque échantillon  $X_1, \dots, X_{25}$  provient d'une  $\mathcal{N}(15, 16)$ .*



Dans l'histogramme de gauche (page précédente),  
les 1 000 valeurs de  $\bar{x}$  pourraient servir d'estimation pour  $\mu$ .

Dans cette situation, environ combien d'estimations sont distantes de  $\mu$  d'au moins 1,5 tonnes?

# Concept d'estimation par intervalle de confiance

Un intervalle de confiance (IC) :

- complète l'estimation ponctuelle en l'entourant d'une **marge d'erreur**.
- donne une idée de la précision obtenue avec l'échantillon.
- est associé à un **niveau de confiance** (probabilité que l'intervalle contienne la vraie valeur du paramètre).

# Définition formelle

- $X_1, \dots, X_n$  : échantillon aléatoire de taille  $n$ ;
- $\theta$  : paramètre d'intérêt (comme  $\mu$  ou  $\sigma^2$ );

## Intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour un paramètre $\theta$

Deux statistiques  $[C_1, C_2]$  calculées à partir de l'échantillon telles que

$$P(C_1 \leq \theta \leq C_2) = 1 - \alpha$$

# Définition formelle

- $X_1, \dots, X_n$  : échantillon aléatoire de taille  $n$ ;
- $\theta$  : paramètre d'intérêt (comme  $\mu$  ou  $\sigma^2$ );

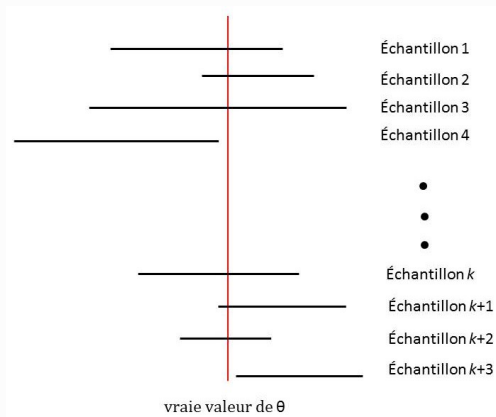
## Intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour un paramètre $\theta$

Deux statistiques  $[C_1, C_2]$  calculées à partir de l'échantillon telles que

$$P(C_1 \leq \theta \leq C_2) = 1 - \alpha$$

- $1 - \alpha$  : niveau de confiance de l'intervalle (fixé arbitrairement par le chercheur).
- Souvent  $1 - \alpha = 0,95$ . Parfois  $1 - \alpha = 0,90$  ou  $0,99$  ou autre.

# Plusieurs intervalles de confiance



Chaque échantillon donne un intervalle différent : sur un grand nombre de répétitions, environ  $(1 - \alpha) \times 100 \%$  contiennent la vraie valeur  $\theta$  (ex. Échantillon  $k + 3$  : celui-ci ne la contient pas).

# Rappel sur les lois échantillonnales

Lorsque  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d.  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , on connaît les lois échantillonnales des statistiques suivantes (*tableau à compléter en classe, à partir des résultats vus au Module 7*) :

| Statistique                                   | Loi échantillonnale | Espérance | Variance |
|-----------------------------------------------|---------------------|-----------|----------|
| $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ |                     |           |          |
| $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$      |                     |           |          |
| $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$               |                     |           |          |

## 5 cas étudiés

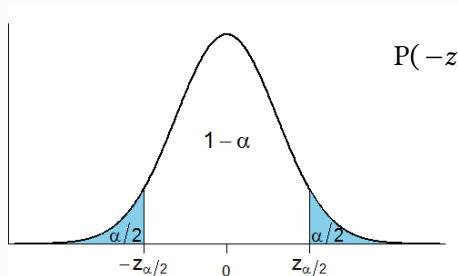
Nous construirons 5 intervalles de confiance :

| Cas | Paramètre  | Situation                                                                  |
|-----|------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $\mu$      | $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma^2$ connue   |
| 2   | $\mu$      | $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma^2$ inconnue |
| 3   | $\mu$      | $X_1, \dots, X_n \sim$ loi inconnue, mais $n$ grand                        |
| 4   | $p$        | $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ avec $n$ grand                  |
| 5   | $\sigma^2$ | $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$                          |

## Intervalles de confiance pour la moyenne

## Cas 1 pour $\mu$ : loi normale, variance CONNUE

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , où  $\sigma^2$  est une valeur connue.
- On déduit que  $\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , donc que  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Soit  $z_{\alpha/2}$ , la valeur telle que  $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$ . On a donc que



$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha.$$

## Cas 1 pour $\mu$ : loi normale, variance connue

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

## Cas 1 pour $\mu$ : loi normale, variance connue

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$
- En isolant  $\mu$  :

$$\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

## Exemple 1

Soit  $X$ , le diamètre (en cm) des disques de frein produits par une machine, où  $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0,0009)$ . On choisit un échantillon de 9 disques au hasard et on calcule un diamètre moyen de 12,05 cm.

a) Donnez un intervalle de confiance de niveau 95% pour  $\mu$ .

Déterminez si les énoncés suivants (liés à l'exemple 1) sont vrais ou faux.

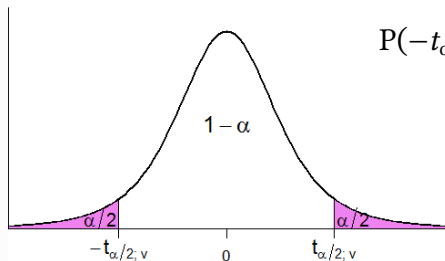
- 95% des disques de cette compagnie ont un diamètre entre 12,03 et 12,07 cm.
- 95% des intervalles calculés avec cette formule (à partir d'échantillons différents) contiendraient le vrai diamètre moyen.
- On a confiance à 95% que la vraie valeur de  $\mu$  est comprise entre 12,03 et 12,07 cm.
- Si on prenait un nouvel échantillon de taille  $n = 9$ , la probabilité que sa moyenne  $\bar{X}$  soit entre 12,03 et 12,07 cm est de 95%.

## Exemple 1 : taille d'échantillon

b) Quelle taille d'échantillon devrait-on collecter pour que la marge d'erreur sur l'estimation du diamètre moyen ne dépasse pas 0,01 cm, si on conserve un niveau de confiance de 95% ?

## Cas 2 pour $\mu$ : loi normale, variance INCONNUE

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , où  $\sigma^2$  est une valeur inconnue, donc à estimer par  $S^2$ .
- On déduit que  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ , donc  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
- Soit  $t_{\alpha/2; n-1}$ , la valeur telle que  $P(T > t_{\alpha/2; n-1}) = \alpha/2$ . Ainsi,



$$P(-t_{\alpha/2; n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2; n-1}) = 1 - \alpha.$$

## Cas 2 pour $\mu$ : loi normale, variance inconnue

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(-t_{\alpha/2; n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2; n-1}\right) = 1 - \alpha$

## Cas 2 pour $\mu$ : loi normale, variance inconnue

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(-t_{\alpha/2; n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2; n-1}\right) = 1 - \alpha$
- En isolant  $\mu$  :

$$\bar{X} - t_{\alpha/2; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

## Exemple 2

Retournons à l'exemple des disques. Supposons que  $\sigma^2$  n'était pas connue et qu'on l'estime par la variance échantillonnale des 9 diamètres observés, soit  $s^2 = 0,0009 \text{ cm}^2$ .

Donnez un intervalle de confiance à 95% pour  $\mu$ . Comparez-le avec l'intervalle obtenu en supposant la variance connue.

## Cas 3 pour $\mu$ : loi inconnue, $n$ grand

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d. d'une loi inconnue.
- Peut-on construire des intervalles de confiance ?

## Cas 3 pour $\mu$ : loi inconnue, $n$ grand

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d. d'une loi inconnue.
- Peut-on construire des intervalles de confiance ?
- L'idée : utiliser le **théorème central limite (TCL)** et le fait que pour  $n$  grand :

$$S^2 \simeq \sigma^2 \text{ et } \bar{X} \approx \mathcal{N}(\mu, S^2/n) \Rightarrow$$

- Si  $n$  est grand, on peut construire des intervalles de confiance dont le niveau sera **approximativement** du niveau désiré.

### Cas 3 pour $\mu$ : loi inconnue, $n$ grand

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \mu \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$
- On déduit que  $P\left(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \alpha$

## Exemple 3

Pour estimer le salaire moyen annuel de jeunes diplômés dans un certain domaine, on a prélevé un échantillon de taille  $n = 100$  et obtenu  $\bar{x} = 34\,224 \$$  et  $s = 4\,668 \$$ .

Donnez un intervalle de confiance de niveau 90% pour le salaire moyen annuel des jeunes diplômés dans ce domaine.

# La marge d'erreur et l'erreur-type

Les trois intervalles de confiance pour  $\mu$  sont symétriques :

$$\bar{X} \pm \text{marge d'erreur}$$

$$\bar{X} \pm \text{quantile} \times \text{erreur-type}$$

Longueur de l'intervalle =  $2 \times$  marge d'erreur

# QUIZ!

Déterminez si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

La marge d'erreur d'un IC sur la moyenne  $\mu$  augmente (donc la précision diminue) si :

- la variabilité des mesures augmente.
- la taille d'échantillon augmente.
- le niveau de confiance augmente.

## Intervalle de confiance pour une proportion

## Cas 4 pour $p$

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. loi Bernoulli( $p$ ), où  $p$  est inconnue et où  $n \geq 30$ .
- L'estimateur ponctuel pour  $p$  est  $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- Par le TCL, nous savons que  $\hat{p} \approx \mathcal{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$  et donc

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \approx \mathcal{N}(0, 1)$$

Ainsi,

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

## Cas 4 pour $p$

On en déduit donc l'intervalle de confiance de niveau approximatif  $(1 - \alpha)$  :

$$P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

## Cas 4 pour $p$

On en déduit donc l'intervalle de confiance de niveau approximatif  $(1 - \alpha)$  :

$$P \left( \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \approx 1 - \alpha$$

Mais il y a un problème.

## Cas 4 pour $p$

On en déduit donc l'intervalle de confiance de niveau approximatif  $(1 - \alpha)$  :

$$P \left( \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) \approx 1 - \alpha$$

Mais il y a un problème.

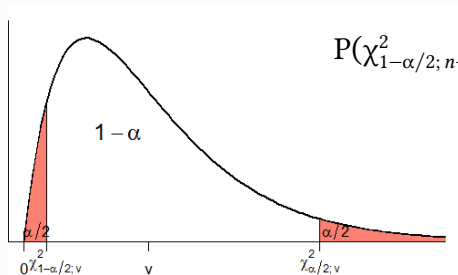
Le paramètre  $p$  inconnu apparaît aussi dans la marge d'erreur ! On le remplace par  $\hat{p}$  (par le TCL, l'approximation reste valide) :

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

## Intervalles de confiance pour la variance

## Cas 5 pour $\sigma^2$ : loi normale, $\mu$ et $\sigma^2$ inconnues

- On suppose que  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. loi  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , où  $\mu$  et  $\sigma^2$  sont inconnues.
- On sait que  $U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$
- Soit  $\chi_{\alpha/2; n-1}^2$ , la valeur telle que  $P(U > \chi_{\alpha/2; n-1}^2) = \alpha/2$ . Ainsi,



$$P(\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2 \leq U \leq \chi_{\alpha/2; n-1}^2) = 1 - \alpha.$$

## Cas 5 pour $\sigma^2$ : loi normale, $\mu$ et $\sigma^2$ inconnues

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \sigma^2 \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2; n-1}^2\right) = 1 - \alpha$

## Cas 5 pour $\sigma^2$ : loi normale, $\mu$ et $\sigma^2$ inconnues

- On cherche  $[C_1, C_2]$  telles que  $P(C_1 \leq \sigma^2 \leq C_2) = 1 - \alpha$
- On sait que  $P\left(\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2; n-1}^2\right) = 1 - \alpha$
- En isolant  $\sigma^2$  (l'inégalité s'inverse) :

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2; n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2; n-1}^2}$$

## Intervalle pour l'écart-type $\sigma$

$$P(C_1 \leq \sigma^2 \leq C_2) = 1 - \alpha$$

est équivalent à

$$P(\sqrt{C_1} \leq \sqrt{\sigma^2} \leq \sqrt{C_2}) = 1 - \alpha.$$

Pour avoir un IC( $\sigma$ ), on prend la racine carrée des bornes d'IC( $\sigma^2$ ).

## Exemple 4

On veut calibrer la machine qui fabrique les disques de frein pour qu'elle soit la plus stable possible. On veut d'abord estimer la variation du diamètre des disques produits, avec un intervalle de confiance à 95%.

Un échantillon de taille 25 a donné une variance échantillonnale de  $0,015 \text{ cm}^2$ . On suppose que les diamètres sont i.i.d. de loi normale.

- a) Donnez un intervalle de confiance pour  $\sigma^2$ .
- b) Déduisez-en un intervalle de confiance pour  $\sigma$ .

## Réponses des exemples

# Réponses des exemples

- **Exemple 1 : a) IC 95 % pour  $\mu$  (variance connue,  $\sigma = 0,03$ ) :**  $12,05 \pm 1,96(0,03)/3 = [12,03 ; 12,07]$  cm ;  
énoncés vrai/faux liés à cet IC : (i) faux ; (ii) vrai ; (iii) vrai ; (iv) faux ; **b)**  
 $n \geq (1,96 \times 0,03/0,01)^2 = 34,57 \Rightarrow n = 35$ .
- **Exemple 2 : variance estimée par  $s = 0,03$ , donc  $T \sim t_8$  et**  
 $t_{0,025;8} = 2,306 \Rightarrow 12,05 \pm 2,306(0,03)/3 = [12,027 ; 12,073]$  cm ; **intervalle plus large que celui obtenu avec  $\sigma$  connue (Exemple 1).**
- **Exemple 3 : IC 90 % pour le salaire moyen,  $z_{0,05} = 1,645$  :**  
 $34\,224 \pm 1,645(4\,668/10) = 34\,224 \pm 767,9 = [33\,456 ; 34\,992]$  \$.
- **Exemple 4 :  $\chi^2_{0,025;24} = 39,364$ ,  $\chi^2_{0,975;24} = 12,401$  ; a) IC( $\sigma^2$ )**  
 $= \left[ \frac{24(0,015)}{39,364} ; \frac{24(0,015)}{12,401} \right] = [0,0091 ; 0,0290]$  cm<sup>2</sup> ; **b) IC( $\sigma$ ) =  $[\sqrt{0,0091} ; \sqrt{0,0290}] = [0,096 ; 0,170]$  cm.**

## Réponses des quiz

# Réponses des quiz

- Quiz (marge d'erreur sur  $\mu$ ) : la variabilité des mesures augmente : vrai ; la taille d'échantillon augmente : faux (la marge diminue) ; le niveau de confiance augmente : vrai.

# Bibliographie

Ce document est rédigé avec Beamer ainsi qu'une classe .cls fournie par Jérôme Soucy. Les diapositives sont adaptées des diapositives créées par Thierry Duchesne et Emmanuelle Reny-Nolin pour le cours STT-1900. Les graphiques proviennent de ces mêmes diapositives.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à l'adresse : [julien.miron@mat.ulaval.ca](mailto:julien.miron@mat.ulaval.ca).